



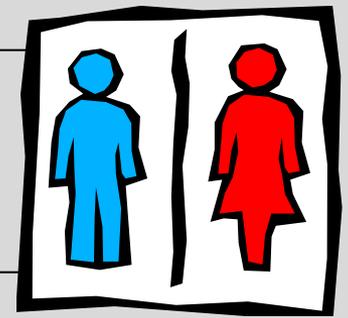
Lo sviluppo dell'intelligenza numerica: tra disturbo e difficoltà di calcolo

Maria Antonietta De Gennaro
mariaantonieta.degennaro@gmail.com



www.poloapprendimento.it

LE TEORIE IMPLICITE SULLA MATEMATICA



⌘ E' più difficile la matematica rispetto all'inglese...

⌘ I maschi sono più portati per le materie scientifiche
le femmine per quelle letterarie.

⌘ Le femmine hanno meno persistenza nei compiti di
matematica, meno fiducia e meno autostima
(Fennema, 1985).

False Credenze

relative a compiti matematici

- ✓ c'è un unico modo esatto di risoluzione di qualsiasi problema matematico (l'applicazione della regola);
- ✓ gli *studenti normali* non si possono aspettare di capire la matematica, ma di memorizzarla e applicare ciò che hanno imparato meccanicamente;
- ✓ la matematica imparata a scuola ha poco o niente a che fare con il mondo reale;
- ✓ la decisione di controllare la correttezza del lavoro svolto dipende dalla disponibilità di tempo
- ✓ **in matematica influisce maggiormente l'abilità innata e la conoscenza di regole**

MOTIVAZIONE E MATEMATICA

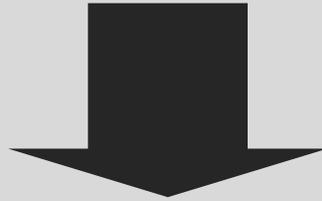


AMBIVALENZA DOVUTA A:

- CARATTERISTICHE DISCIPLINA: complessità e diversità tra compiti
- ABILITÀ COGNITIVE richieste: working memory, abilità visuo-spaziali, pianificazione, comprensione,...
- DIDATTICA
- ATTEGGIAMENTO SOCIALE rispetto al successo/insuccesso di: insegnanti, genitori, coetanei,...

ALCUNI DATI

Fine scuola superiore:



Bassa percentuale degli studenti che ritiene
di avere buone competenze matematiche

Segnalazione di:

- 5 bambini per classe con difficoltà di calcolo;
- 5 - 7 bambini per classe con difficoltà di soluzione dei problemi.

... considerando che in ogni classe ci sono mediamente 25 alunni.

almeno 20% della popolazione scolastica viene segnalato per difficoltà
nel calcolo e/o nella risoluzione dei problemi

IARLD

(International Academy for Research in Learning Disabilities)

2,5% della popolazione scolastica presenta difficoltà in matematica in comorbidità con altri disturbi.

Discalculia: 0,5 -1% della popolazione



molti casi sono falsi positivi

Nell'apprendimento matematico si intersecano diversi aspetti:

- la **rappresentazione della quantità** è sottesa a tutte le aree della matematica
- la **soluzione di problemi** e la **geometria** richiedono normalmente operazioni di calcolo
- il calcolo richiede la comprensione dell'**operazione**.

Le scienze cognitive non parlano di una difficoltà in matematica in generale ma cercano di capire i **processi** implicati in ogni dominio specifico!!!

Le abilità aritmetiche

- Saper leggere e scrivere i numeri
- Contare oggetti in un insieme
- Calcolare attraverso le quattro operazioni
- Applicare queste abilità sul denaro
- Dire orari e date
- Trovare una certa pagina in un libro
- Selezionare il canale televisivo



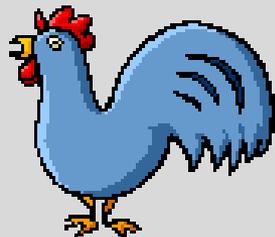
Il processo di acquisizione di tali strumenti aritmetici è supportato soltanto da capacità cognitive generali (ragionamento, memoria a breve termine, abilità spaziali)?

Oppure abbiamo capacità numeriche innate?





Secondo diversi studi, sia gli animali che i neonati sono capaci di riconoscere le quantità numeriche e sono in grado di distinguere gruppi di oggetti in base alla numerosità.



Gallister e Gelman (1992)

Hanno ipotizzato che la conoscenza numerica abbia delle **basi diverse ed indipendenti** da quelle che coinvolgono le **competenze linguistiche**.

Dalla letteratura: Principali meccanismi innati

**Antell e Keating (1983)
Starkey, Spelke e Gelman
(1990)**

Paradigma dell'abituazione

Wynn (1992)

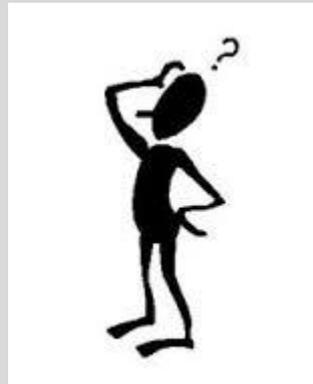
Violazione delle aspettative

Neonati e bambini di pochi mesi di vita sono in grado di percepire la numerosità di un insieme visivo di oggetti in modo immediato, senza contare.



OBIEZIONE

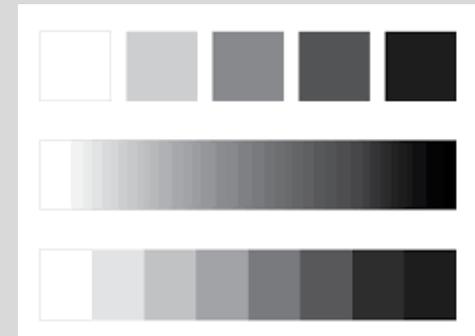
E se si trattasse solo di una forma di percezione di modelli visivi e non di numerosità?



ABILITÀ NUMERICHE PRECOCI

Van Loosbroek e Smitsman (1990): bambini da 5-13 mesi reagiscono alla numerosità degli **oggetti in movimento**.

Due o tre rettangoli in varie tonalità di grigio percorrevano traiettorie casuali sullo schermo, rendendo impossibile l'identificazione di modelli visivi. Quando il numero dei rettangoli cambiava, i tempi di osservazione aumentavano significativamente.



ABILITÀ NUMERICHE PRECOCI

Karen Wynn (1995): la sensibilità del bambino alla numerosità riguarda anche **insiemi di azioni**.

Bambini di 6 mesi, “abituati” a vedere una marionetta fare due salti, raddoppiavano i tempi di osservazione quando i salti diventavano tre.



Anche la capacità di aggiungere e togliere un elemento da una quantità data è innata:

$n+1$ e $n-1$.

Questa è la capacità primordiale che ci sostiene nelle operazioni di calcolo mentale.

Concetto di
numerosità

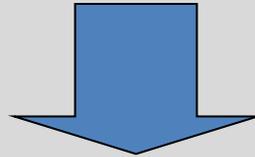


Aspettative
aritmetiche

Il senso del numero nei neonati: aritmetica

Wynn (1992)

«Violazione delle aspettative aritmetiche»



**A 5 mesi i bambini possiedono
già delle aspettative aritmetiche**

Neonati e bambini di pochi mesi di vita sono in grado di percepire la numerosità di un insieme visivo di oggetti in modo immediato, senza contare.

Questa capacità si chiama

SUBITIZING

O

IMMEDIATIZZAZIONE

(Atkinson, et al. 1976)

Le “abilità matematiche” innate e pre-verbali

Subitizing Permette di individuare il numero di elementi presenti in un insieme in modo rapido e senza contare. Funziona con un massimo di $\frac{3}{4}$ elementi.

Stima Permette l'individuazione di quantità al di fuori del limite di subitizing (superiori a 3-4) quando il conteggio non è possibile.

Acuità numerica Capacità di discriminare fra insiemi di differenti numerosità quando il conteggio non è possibile. Più due insiemi sono numericamente vicini più è difficile stabilire la quantità maggiore.

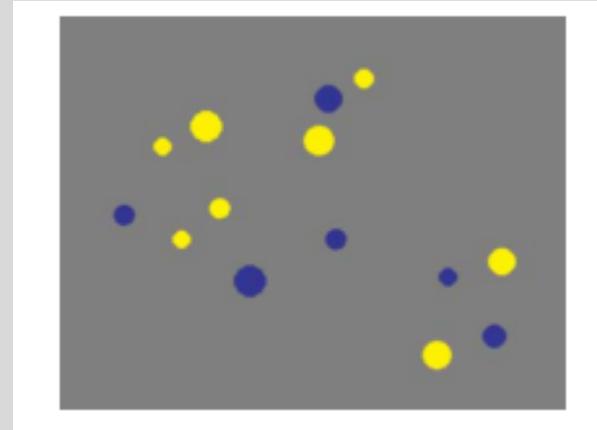
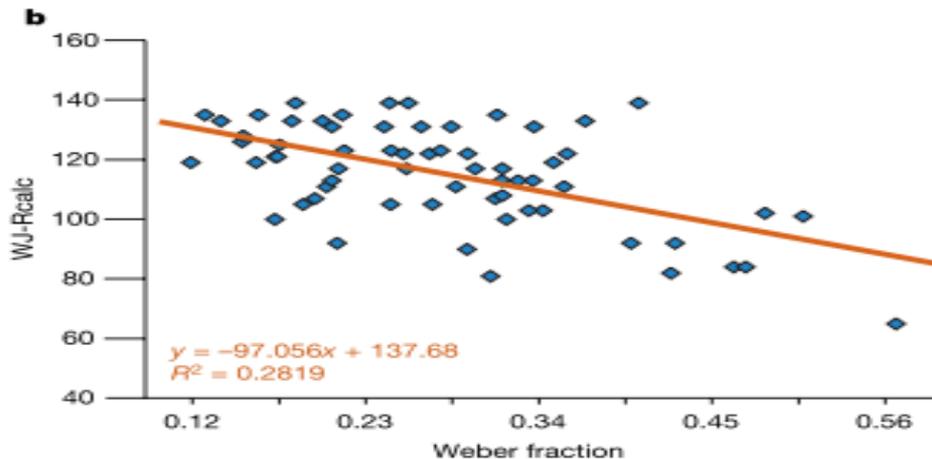
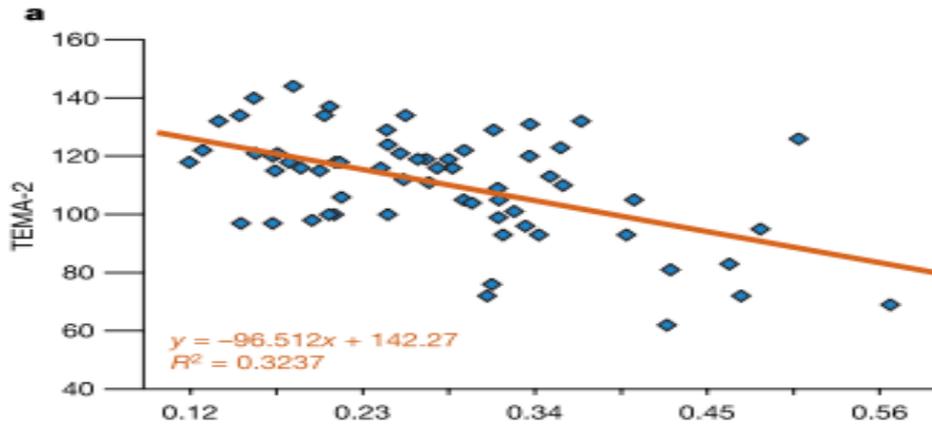
Acuità numerica, Stima, Subitizing....



**Cosa c'entrano con l'apprendimento
matematico tutte queste prove sperimentali?**

Acuità numerica e successo matematico

Halberda et al. (2008) → Acuità numerica



L'acuità numerica, intesa come precisione nel discriminare insiemi d'oggetti, è in relazione con il rendimento matematico.

Acuità numerica e successo matematico

Piazza, Facoettei, Trussardi, Berteletti, Conte, Lucangeli, Dehaene & Zorzi, Cognition, 2010 → Acuità numerica

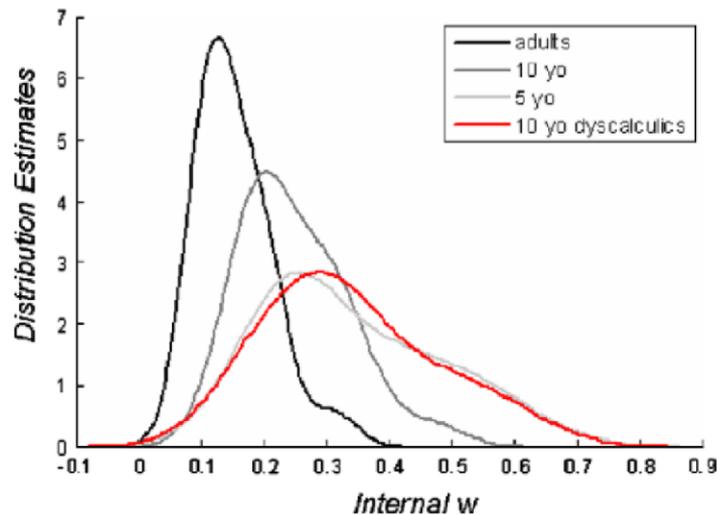
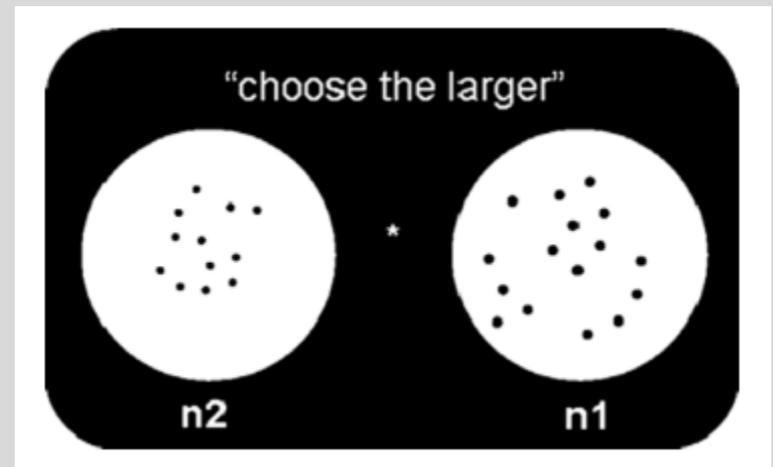


Fig. 5. Distribution estimates of w as a function of age group. In black and gray distribution estimates of w in the non-dyscalculic groups. In red, distribution estimates of w in the dyscalculic group. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)



L'acuità numerica migliora con l'età ed è deficitaria in bambini discalculici.

Acuità numerica e successo matematico

*Piazza, Facoetti, Trussardi, Bertelletti, Conte, Lucangeli,
Dehaene e Zorzi, 2010*

Bambini di 10 anni con diagnosi di discalculia pura ottengono un indice sensibilmente inferiore a quello dei coetanei non discalculici, paragonabile a quello di bambini di 5 anni

Questi dati ci dimostrano che si può parlare di
Intelligenza Numerica

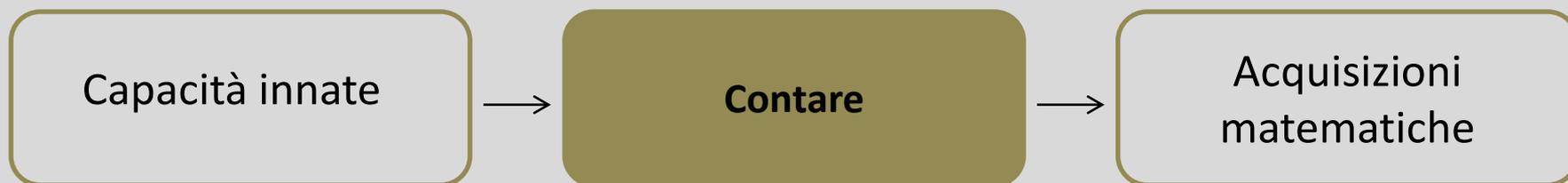
La capacità di manipolazione di “intelligere” le quantità-
ovvero manipolare, capire, ragionare, attraverso il complesso
sistema cognitivo dei numeri e delle quantità.

- È sostenitore della tesi innatista del “cervello matematico”. Il **Modulo Numerico** (circuiti cerebrali specializzati) ha la funzione di classificare il mondo in termini di quantità numerica o numerosità
- Paragona la percezione della numerosità alla percezione dei colori, entrambi i processi sono automatici
- “... la natura fornisce un nucleo di capacità per classificare piccoli insiemi di oggetti nei termini della loro numerosità ... per capacità più avanzate abbiamo bisogno dell’istruzione, ossia di acquisire gli strumenti concettuali forniti dalla cultura in cui viviamo”

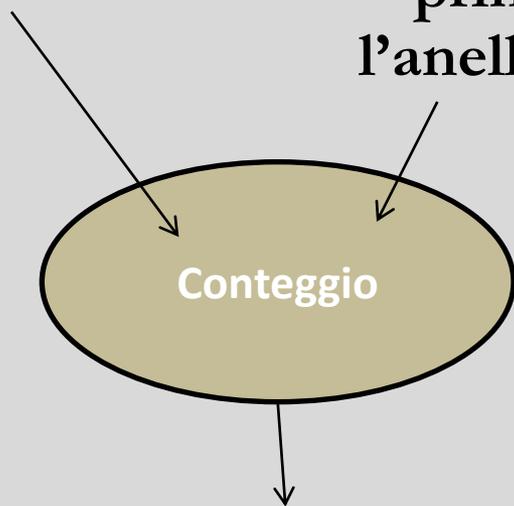
ACQUISIZIONE DELLE PAROLE-NUMERO E CONTEGGIO (2-4 ANNI)

NATURA

CULTURA



**Imparare a contare rappresenta il
primo collegamento tra natura e cultura:
l'anello di congiunzione tra numeri e calcolo**



Il conteggio è la prima strategia che il bambino utilizza per svolgere semplici addizioni.



Prima di procedere all'insegnamento delle procedure di calcolo bisogna assicurarsi che abbia ben automatizzato la capacità di **conta**.

I principi impliciti del conteggio (Gelman e Gallistel)

Ordine stabile

- Il bambino deve conoscere le parole-numero ed essere in grado di ripeterle seguendo l'ordine esatto

L'uso competente della sequenza inizia verso i 3-4 anni

Procede fino agli 8-9 anni con l'acquisizione di unità e decine

Dapprima entro il 10, poi fino al 20, per arrivare a 100 verso i 6-8 anni

I principi impliciti del conteggio (Gelman e Gallistel)

Corrispondenza biunivoca

- Il b.no deve far corrispondere ogni elemento dell'insieme che sta contando a una e una sola parola-numero

Già a 2 anni, indipendentemente dall'acquisizione della sequenza verbale: il bambino distribuisce un giocattolo a ogni persona, mette ogni tazza sul suo piattino, ecc.

Fino a 4 anni non è chiara la relazione tra strategia distribuzione e conteggio: bambino "uno per me e uno per te", sperimentatore conta, bambino non inferisce di avere stessa quantità.

Fino a 5 anni errori "parola-indicazione" e "indicazione-oggetto"

I principi impliciti del conteggio (Gelman e Gallistel)

Cardinalità

- Il b.no deve capire che la parola-numero associata all'ultimo elemento contato in un insieme corrisponde alla cardinalità dell'insieme, cioè alla sua numerosità

Viene acquisito per ultimo. A 3, 6 dicono l'ultima parola del conteggio ma non significa che comprendono realmente la numerosità. Semplice imitazione

A 4 anni circa riconosce il valore cardinale delle parole-numero pronunciate

Verificare che le competenze del conteggio siano ben acquisite. In particolare i **cinque principi del conteggio** (Gelman e Gallistel)

Ordine stabile

- Il bambino deve conoscere le parole-numero ed essere in grado di ripeterle seguendo l'ordine esatto

Corrispondenza biunivoca

- Il b.no deve far corrispondere ogni elemento dell'insieme che sta contando a una e una sola parola-numero

Cardinalità

- Il b.no deve capire che la parola-numero associata all'ultimo elemento contato in un insieme corrisponde alla cardinalità dell'insieme, cioè alla sua numerosità

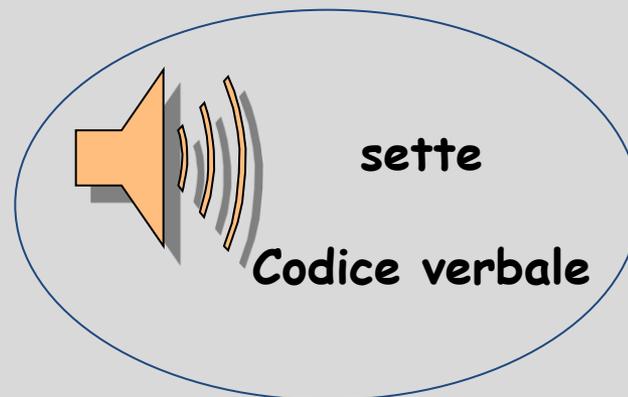
Astrazione

- Il b.no deve capire che qualunque cosa può essere contata indipendentemente dalle caratteristiche degli elementi dell'insieme

Irrilevanza dell'ordine

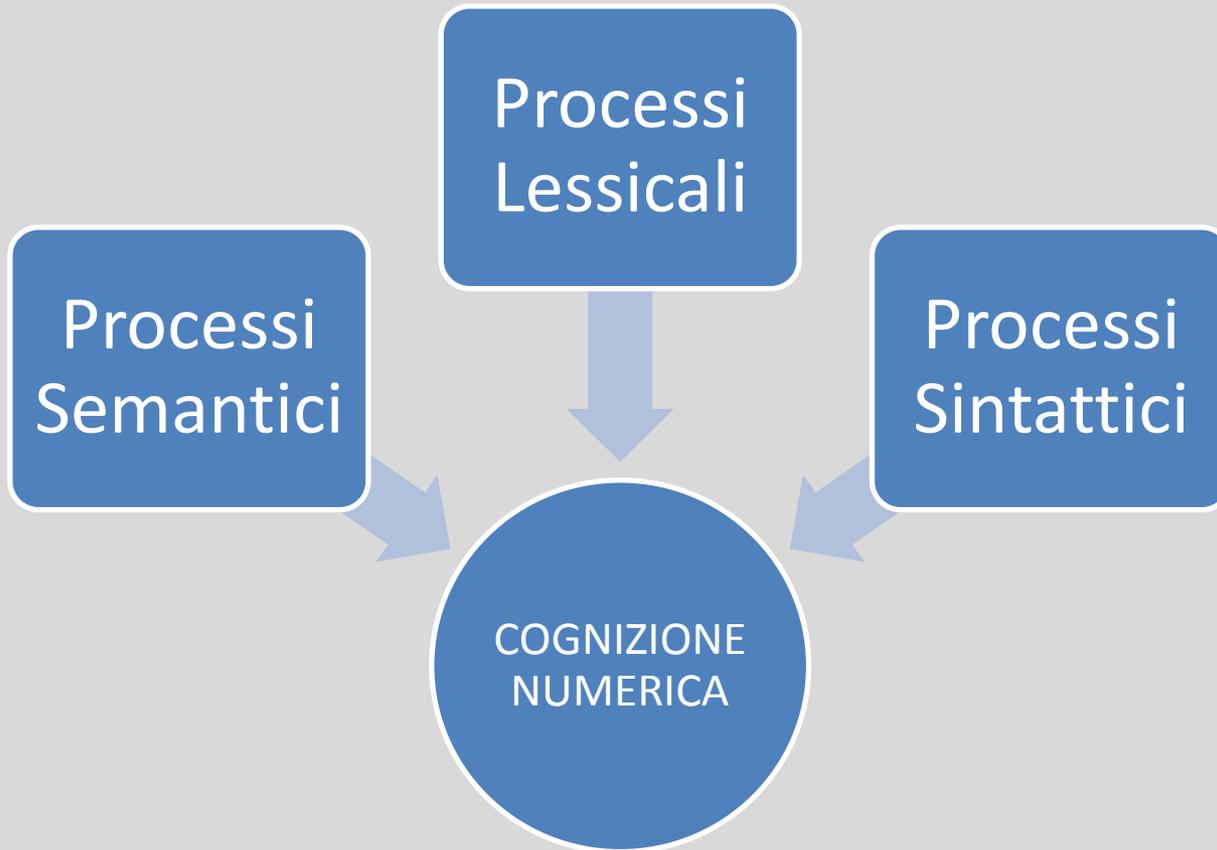
- Il b.no deve comprendere che l'ordine in cui sono contati gli elementi non ne modifica la cardinalità.

Pensate al numero 7.
Come lo immaginate (rappresentate)
nella vostra mente?



Il passaggio da un codice all'altro richiede la
TRANSCODIFICA di input/output.

I processi della cognizione numerica



I tre sistemi funzionano in base a:

Meccanismi Semantici

(regolano la comprensione della quantità)

(3 = )

Meccanismi Lessicali

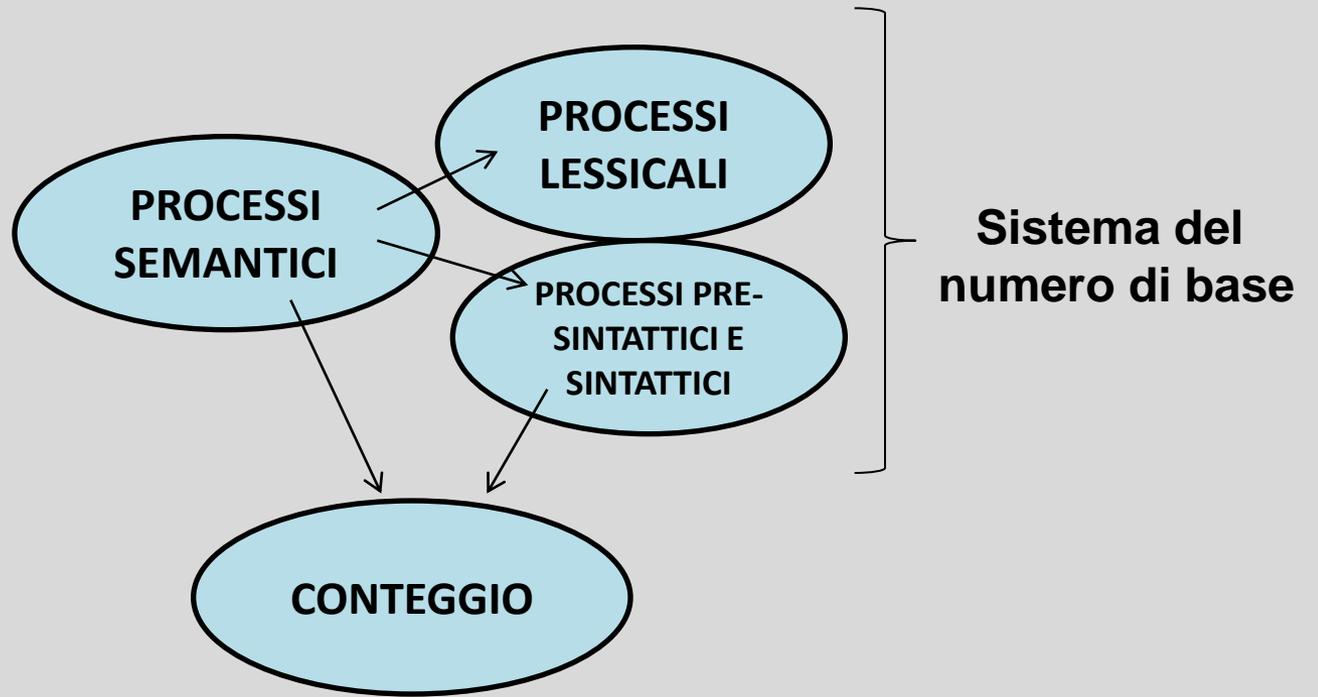
(regolano il nome del numero)

(1 – 11)

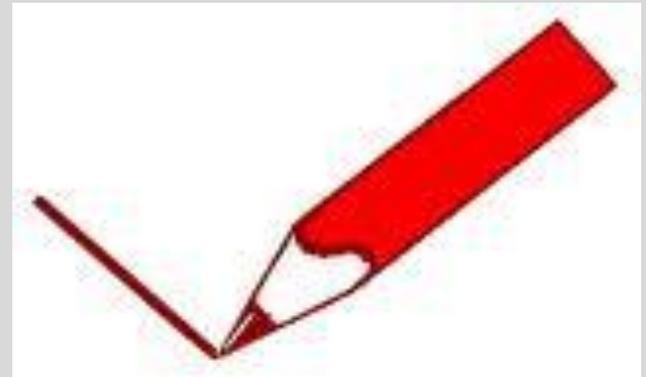
Meccanismi Sintattici

(Grammatica Interna = Valore Posizionale delle Cifre)

Esempio	da	U	la posizione
	1	3	cambia nome
	3	1	e semante



ALCUNI ERRORI NEL SISTEMA DI BASE DEL NUMERO....



Errori Semantici

Metti in ordine questi numeri dal più piccolo al più grande: CLASSE D

ESEMPIO

360 175 276 194	→	175 194 276 360
-----------------------	---	-----------------------

255 20,5 25,5 205	→	205 20,5 25,5 255
-------------------------	---	-------------------------

3700 3007 3773 3037	→	3037 ³⁰⁰⁷ 3007 3700 3007 3037
---------------------------	---	---

2250 2000 2001 5000	→	2000 2001 5000 2250
---------------------------	---	---------------------------

454 544 545 154	→	154 454 544 545
-----------------------	---	-----------------------

608 68,3 63,8 68,23	→	608 68,3 63,8 68,23
---------------------------	---	---------------------------

Esempi di errori Lessicali

- Dettato di numeri

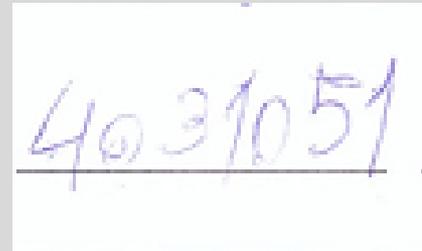
851



8101

A photograph of a handwritten number '8101' in blue ink on a white background. The number is written on a horizontal line. The digit '8' is written with a loop, and the '1' is a simple vertical stroke.

4314



4031051

A photograph of a handwritten number '4031051' in blue ink on a white background. The number is written on a horizontal line. The digits are '4', '0', '3', '1', '0', '5', and '1'. The '4' is written with a loop, and the '0' is a simple oval.

GLI ERRORI INTELLIGENTI

Scrivi centotrè: 1003 \longrightarrow Scrive 100 e 3

Scrivi milletrecentosei: 1000306 \longrightarrow Scrive 1000 e 306

34 x

2=

36

Errore riconoscimento
segno operazione

327+

43

=

757

Errore nell'incolonnamento

27 x

13=

81

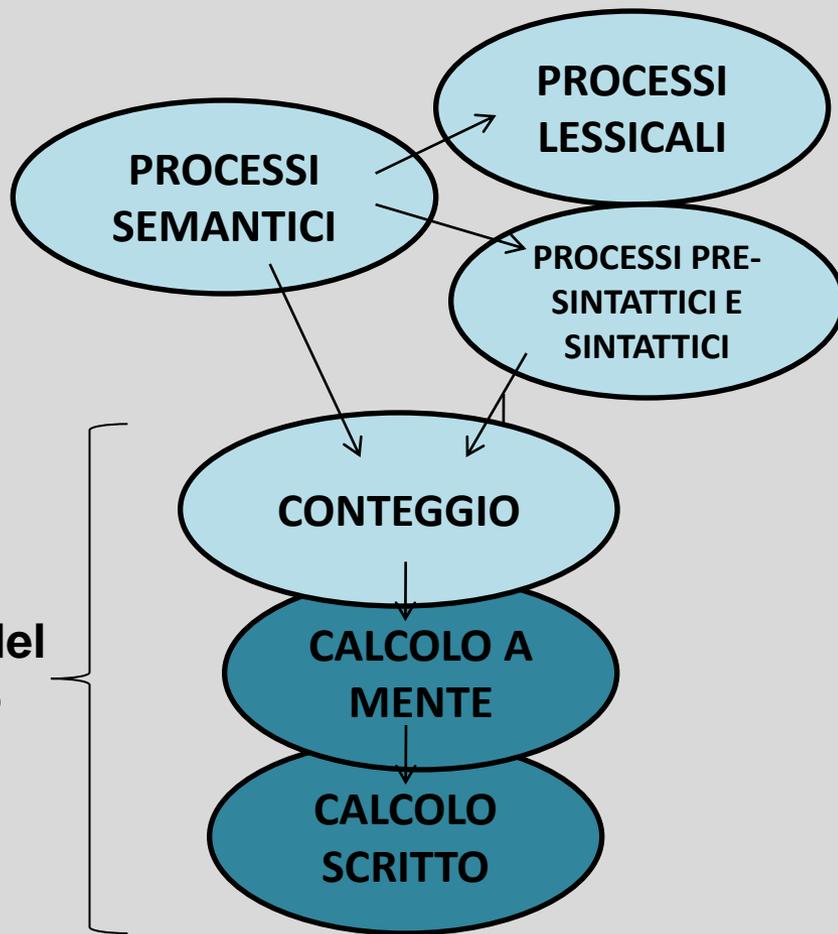
Errore nella procedura (si
ferma al primo passaggio)

112-

18=

105

Errore nella procedura e nel calcolo
(12-8=5; 1-1=0; 1-0=1)



**Sistema del
numero di base**

I meccanismi di calcolo e manipolazione del sistema numerico possono avere origine solo nel momento in cui i meccanismi di riconoscimento pre-verbale della quantità si sono integrati con gli apprendimenti relativi ai sistemi di conteggio, lettura e scrittura di numeri arabi.

CALCOLO

La capacità di calcolo è l'insieme dei processi che consentono di operare sui numeri tramite operazioni aritmetiche.

Nell'esecuzione di compiti aritmetici possono agire due tipi di strategie:

a) Strategie basate sul recupero mnemonico
(CONOSCENZE DICHIARATIVE)

b) Strategie basate sui processi procedurali
(CONOSCENZE PROCEDURALI)



Le conoscenze procedurali sono diverse nel calcolo scritto dal calcolo a mente

- Sono le combinazioni più frequenti (operazioni con numeri inferiori al 10, le tabelline...)
- Calcoli di base archiviati nella memoria a lungo termine (magazzino dei f.a.) dalla quale possono essere direttamente richiamati senza ricorrere a procedure di calcolo (conoscenze dichiarative)

Fatti aritmetici (f.a.)

$$5+5$$

$$17+5$$

- Riconoscimento del segno
- Riconoscimento dei dati
- Recupero della memoria?



SI' → 22

NO → recupero delle regole procedurali
dell'addizione

Calcolo a
mente

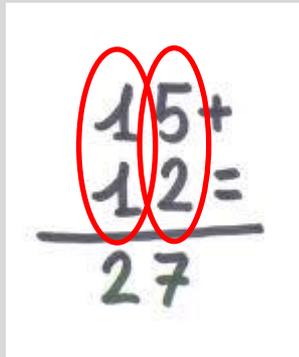
Calcolo scritto

Il calcolo scritto

Le procedure ordinano la forma grafica della specifica operazione: l'incolonnamento dei numeri e la direzione spazio/temporale delle azioni

Si procede da destra verso sinistra, prima si effettua il calcolo delle unità, poi delle decine

Le decine si devono scrivere sotto le decine


$$\begin{array}{r} 15 + \\ 12 = \\ \hline 27 \end{array}$$

Le unità si devono scrivere sotto le unità

!!!!La regole del riporto!!!!

CALCOLO SCRITTO



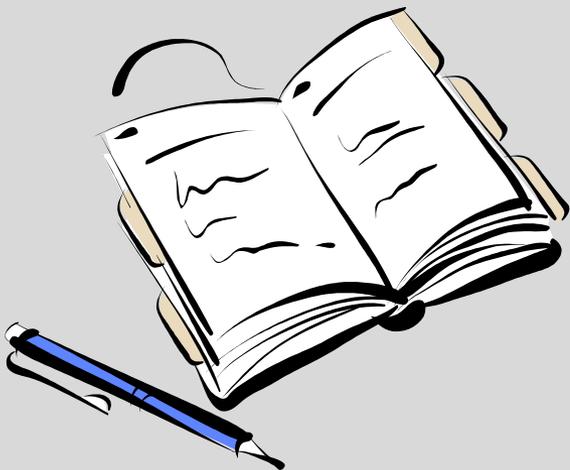
- Permette un ampliamento delle nostre possibilità di calcolo.
- E' un paragrafo del calcolo mentale e non il contrario.
- E' una protesi costituita da carta e inchiostro per le situazioni in cui la mente è in difficoltà per i suoi limiti di rappresentazione.
- Permette di alleggerire il carico cognitivo (es. MdL) richiesto da operazioni complesse.
- Riguarda l'apprendimento delle procedure e degli algoritmi delle operazioni che col passare del tempo si automatizzano

Cos'è il Disturbo Specifico
di Apprendimento?



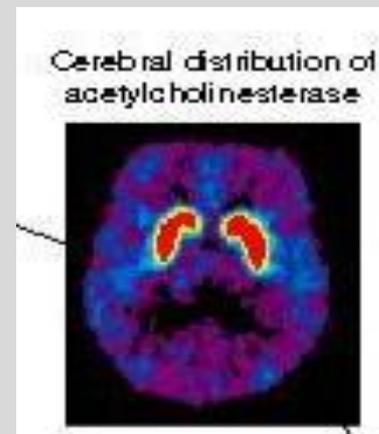
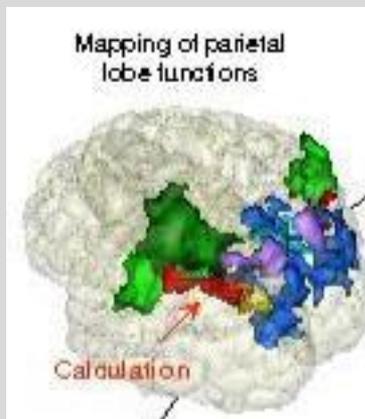
**Linee guida della CONSENSUS
CONFERENCE**

LEGGE 170



DE *(OMS)*

*disturbo a patogenesi organica,
geneticamente determinato, espressione
di disfunzione cerebrale*



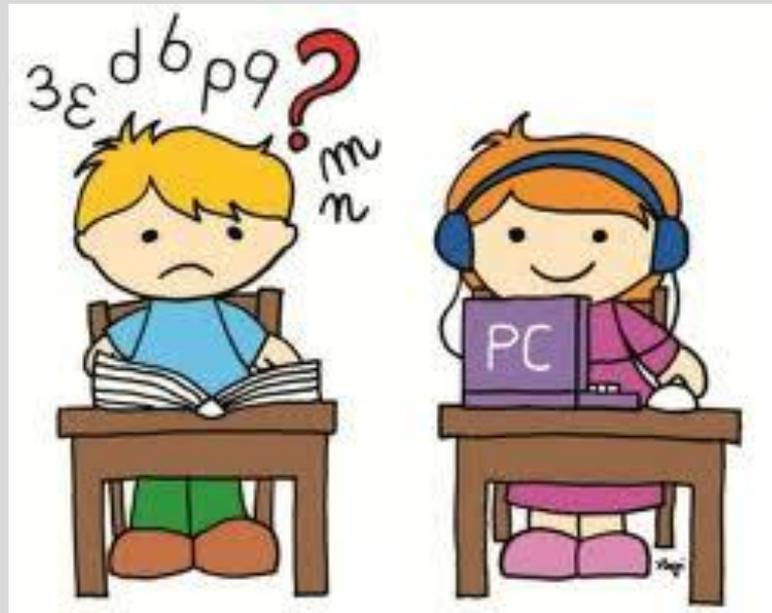
LD secondo OMS e IARLD



Modello Dicotomico



Modello Maturazionale

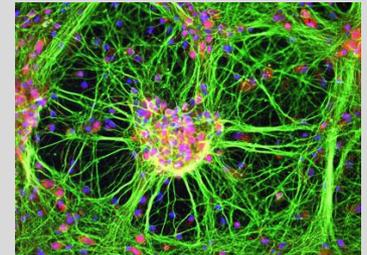
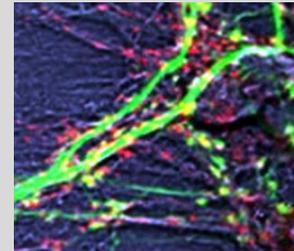
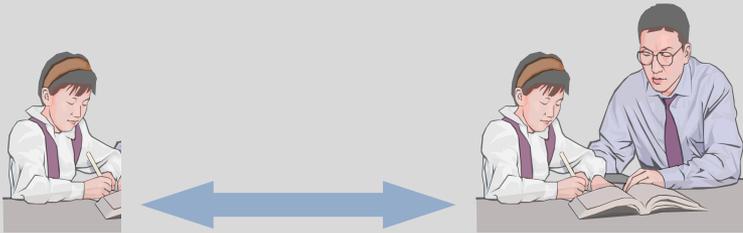


MODELLO MATURAZIONALE



IERI: Vygotsky - Zona di sviluppo prossimale

OGGI: Plasticità cerebrale



POTENZIAMENTO SVILUPPO PROSSIMALE (Vygotsky)

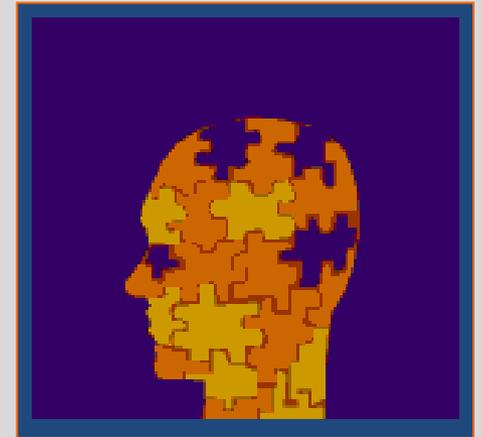


NEUROSCIENZE

PLASTICITÀ CEREBRALE

programmazione
genetica

esperienze postnatali



Consensus Conference (2011)

Le disfunzioni neurobiologiche alla base dei disturbi interferiscono con il normale processo di acquisizione della lettura, della scrittura e del calcolo. I fattori ambientali - rappresentati dalla scuola, dall'ambiente familiare e dal contesto sociale - si intrecciano con quelli neurobiologici e contribuiscono a determinare il fenotipo del disturbo e un maggiore o minore disadattamento.

Il DSA è un disturbo cronico, la cui espressività si modifica in relazione all'età e alle richieste ambientali: si manifesta cioè con caratteristiche diverse nel corso dell'età evolutiva e delle fasi di apprendimento scolastico. La sua prevalenza appare maggiore nella scuola primaria e secondaria di primo grado. L'espressività clinica è inol-

La definizione di una diagnosi di DSA avviene in una fase successiva all'inizio del processo di apprendimento scolastico. È necessario infatti che sia terminato il normale processo di insegnamento delle abilità di lettura e scrittura (fine della seconda primaria) e di calcolo (fine della terza primaria).

Consensus Conference (2011)

Sulla base del deficit funzionale vengono comunemente distinte le seguenti condizioni cliniche:

- dislessia, cioè disturbo nella lettura (intesa come abilità di decodifica del testo)
- disortografia, cioè disturbo nella scrittura (intesa come abilità di codifica fonografica e competenza ortografica)
- disgrafia, cioè disturbo nella grafia (intesa come abilità grafo-motoria)
- discalculia, cioè disturbo nelle abilità di numero e di calcolo (intese come capacità di comprendere e operare con i numeri).



IL DOCUMENTO D'ACCORDO

Ottobre 2012

1. **La valutazione delle singole abilità deve prevedere l'utilizzo di prove standardizzate e con adeguate proprietà psicometriche** in particolare per quanto riguarda la validità, l'attendibilità test-retest e le caratteristiche del campione di standardizzazione, proposte anche in modalità individuale, che esaminano la cognizione numerica, e il calcolo mentale e scritto negli indici di *accuratezza e rapidità*.
2. **Si considera l'ipotesi di discalculia solo in presenza di punteggi critici, che si collocano sotto il cut-off del 5 percentile (o le 2 ds), in almeno il 50% in una batteria** sufficientemente rappresentativa delle abilità di numero e calcolo rispetto alla classe frequentata e al programma didattico svolto o, nel caso il bambino sia sotto il cut-off in un numero di prove minori, in punteggi estremamente severi in prove particolarmente significative (ad esempio accuratezza o velocità nel calcolo scritto).
3. **Le problematiche devono avere carattere di persistenza**, in quanto presenti nell'arco della storia scolastica del bambino.

4. La diagnosi di certezza, nei casi meno chiari, può essere posta dopo un periodo di alcuni mesi di adeguata stimolazione delle componenti compromesse. Infatti il disturbo deve avere persistenza e resistenza ai trattamenti di recupero e/o potenziamento (Tale criterio è particolarmente importante a nostro parere considerato il numero molto frequente di falsi positivi in tale dominio); se questa indicazione non fosse praticabile, anche la rivalutazione dopo alcuni mesi utilizzando le stesse prove potrebbe aiutare il clinico nella decisione per l'assenza/presenza di un disturbo.

5. La diagnosi può essere supportata dalla presenza di almeno alcuni indici clinici fra quelli frequentemente associati alla discalculia, come ad es. segni neuropsicologici ad esempio nei meccanismi sintattici visivo spaziali (13; 31; 1/3; (1)3), nella memoria fonologica, ad esempio da pregresso disturbo del linguaggio con conseguenze nella memoria di lavoro verbale, con potenziali ricadute nella scrittura del numero e nel recupero di fatti numerici, familiarità, ecc..;

6. Il disturbo deve avere serie conseguenze adattive, presentandosi in compiti tipici della vita scolastica del bambino (come emerso da prove standardizzate ecologiche e dai riscontri forniti dalla Scuola) e/o in situazioni matematiche della vita quotidiana.

7. Devono essere rispettati i criteri adottati in generale per la diagnosi di DSA, come l'assenza di fattori contestuali, ed altri fattori di esclusione come handicap sensoriale e intellettuale.

DISTURBO

DIFFICOLTÀ

INNATO

**RESTISTENTE ALL'INTERVENTO
RESISTENTE ALL' AUTOMATIZZAZIONE**

NON INNATA

**MODIFICABILE CON INTERVENTI MIRATI
AUTOMATIZZABILE (TEMPI DILATATI)**

A PROPOSITO DI AUTOMATIZZAZIONE DEI PROCESSI

Studio di De Candia, Bellio, Tressoldi, 2007;
Re, Pedron, Tressoldi, Lucangeli

Nei ragazzi con discalculia dopo 6-8 mesi di training specifico sulle componenti del calcolo deficitarie, quasi tutti i partecipanti riescono a raggiungere un criterio di sufficienza nella correttezza ma quasi nessuno in quello della velocità

**Ulteriore evidenza della resistenza
all'automatizzazione**

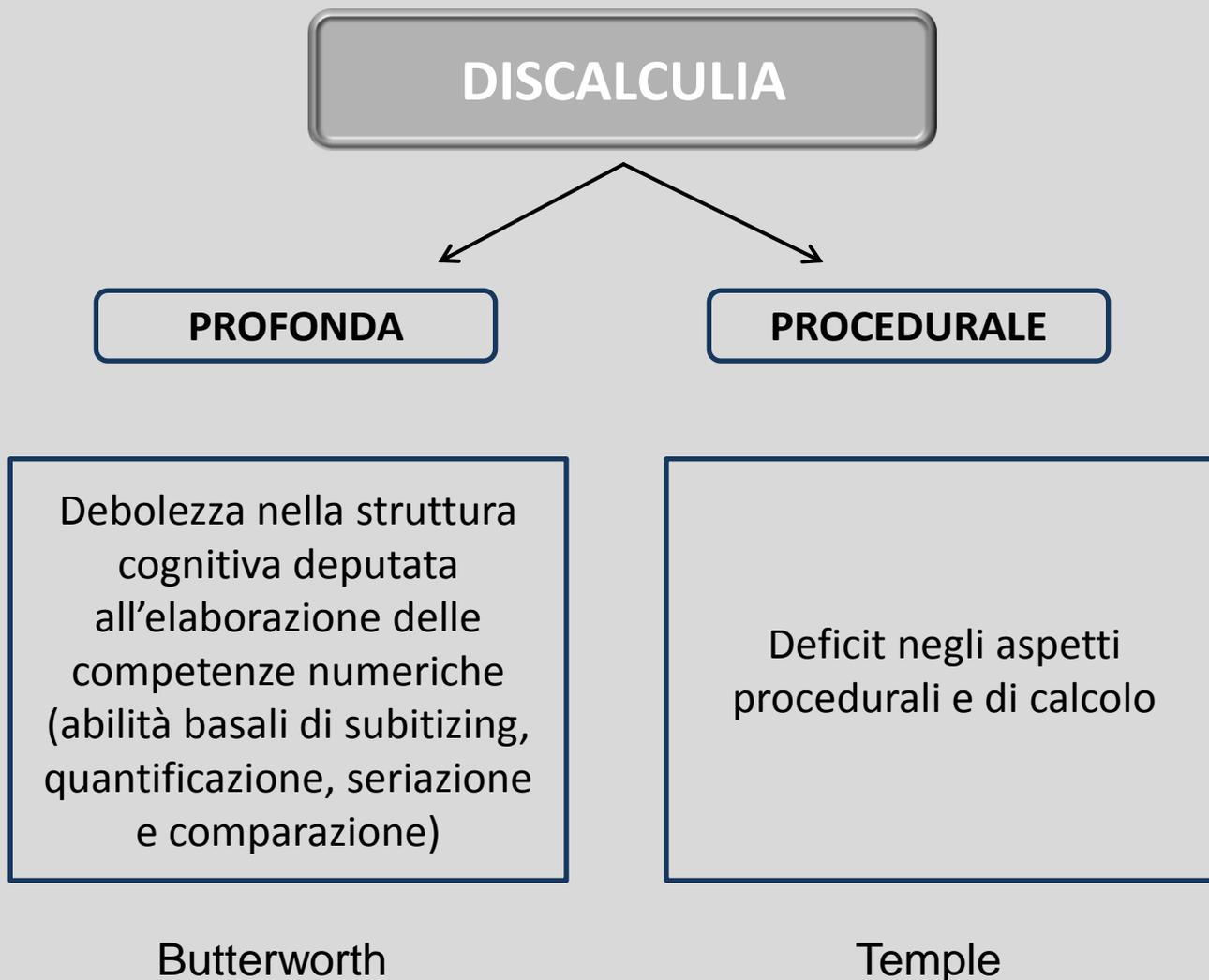
I SOTTOTIPI DI DISCALCULIA *dal documento di accordo*

Si raccomanda di non utilizzare criteri di classificazione facendo riferimento a più o meno sottotipi precisi in quanto a livello internazionale non si è ancora raggiunto un consenso sulla loro distinzione.

TUTTAVIA

Si suggerisce di descrivere i profili funzionali di ciascun DSA in quanto fondamentali per personalizzare gli interventi educativi e ri-abilitativi

I PROFILI DI DISCALCULIA *secondo la Consensus*



ANALISI DEGLI ERRORI

Identificare i
profili di
discalculia

Capire il
processo
deficitario

Individuare il
sistema
compromesso

Impostare il
corretto
potenziamento